Uma abordagem de ordem fracionária para as equações de Navier-Stokes em 2D

Juan Carlos Oyola Ballesteros[1]

Um dos modelos matemáticos mais renomados em dinâmica de fluidos são as equações de Navier-Stokes. Essas equações buscam determinar os campos de velocidade e pressão dentro de um fluido. Elas estão entre as equações mais úteis, descrevendo a física de diversos fenômenos de interesse econômico e acadêmico. As equações de Navier-Stokes encontram aplicações na modelagem de padrões climáticos, correntes oceânicas, fluxos de água em dutos, entre outros domínios. Essas equações podem ser derivadas diretamente das leis de Newton sob a suposição de incompressibilidade, onde a pressão não afeta o volume do fluido. Consulte [1, Chapter 1] para mais detalhes.

Um avanço importante na teoria das equações diferenciais parciais foi a introdução do conceito de soluções fracas por J. Leray, conforme detalhado em [2], especialmente no contexto das equações de Navier-Stokes. A teoria de Leray estabelece a existência de soluções em um novo sentido variacional, que pode ser potencialmente irregular. Essa abordagem é baseada em estimativas de energia e em processos de limite específicos nas topologias fraca e fraca-$*$ de alguns espaços Bochner-Lebesgue. Para uma revisão mais abrangente, consulte os trabalhos de [3, 4, 5].

Por outro lado, o cálculo fracionário e sua aplicação a métodos analíticos para resolver equações diferenciais de ordem fracionária, conforme demonstrado em [6, 7, 8, 9], estão se tornando ferramentas essenciais para abordar uma ampla gama de problemas relacionados à dinâmica de fluidos, estruturas porosas, teoria de controle e sistemas dinâmicos, como discutido em [10, 11, 12, 14]. Diferentemente do cálculo clássico, que lida principalmente com derivadas e integrais de ordem inteira, o cálculo fracionário estende essas operações para ordens reais e até complexas.

Motivados pelas teorias mencionadas, introduzimos agora nossa abordagem de ordem fracionária para as equações de Navier-Stokes em 2D. Seja Ω um subconjunto aberto, limitado e de fronteira Lipschitz de $\mathbb{R}^2$, $\alpha \in (1/2, 1)$, $T > 0$ e $\nu > 0$ constantes fixos. Considere $f : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^2$ como o termo de força, e seja $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ a condição inicial. As equações de Navier-Stokes em 2D com uma derivada fracionária de Caputo no tempo são expressas como segue:

$$\begin{cases} cD_t^\alpha u(t,x) - \nu\Delta u(t,x) + (u(t,x)\cdot\nabla)u(t,x) + \nabla p(t,x) = f(t,x), & \text{in } (0,T)\times\Omega, \\ \operatorname{div} u(t,x) = 0, & \text{in } (0,T)\times\Omega, \\ u(t,x) = 0, & \text{on } [0,T]\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

onde cD_t^α representa a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha > 0$.

Nosso objetivo aqui é estabelecer uma formulação fraca para o problema (1). Subsequentemente, buscamos aplicar o método de Faedo-Galerkin para encontrar uma solução fraca para nosso problema, seguindo a abordagem clássica; consulte [13] para informações detalhadas. Ao realizar este procedimento, encontramos vários desafios e questões técnicas que abordamos com sucesso e agora pretendemos apresentar.

[1]Pos-Graduação Matemática Pura e Aplicada-Universidade Federal de Santa Catarian-Florianópolis-SC- jcoyolaba@unal.edu.co

Referências

[1] C. R. Doering, J. D. Gibbon, Applied analysis of the Navier-Stokes equations. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[2] J. Leray, Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Thèses de l'entre-deux-guerres. **142** (1933) 88 p., http://www.numdam.org/item?id=THESE-1933-142-1-0

[3] C. Foias, Statistical study of Navier-Stokes equations initial value problem. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. **48** (1972) 219-348, http://www.numdam.org/item/RSMUP-1972-48-219-0/

[4] C. Foias, G. Prodi, Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. **39** (1967) 1-34, http://www.numdam.org/item/RSMUP-1967-39-1-0/

[5] C. Foias, R. Temam, Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations. J. Funct. Anal. 87(2)(1989) 359–369, https://doi.org/10.1016/0022-1236(89)90015-3

[6] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[7] F. Maninardi, Fractional Calculus and Waves in linear Viscoelasticity, Imperial College Press, London, 2010.

[8] K. B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, San Diego, 1994.

[9] I.Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[10] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I Marichev, Fractional Integral and Derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach Sci. Publishers, Yverdon, 1993.

[11] H. Schiessel, R. Metzler, A. Blumen, T.F. Nonnenmacher, Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutionsTo. J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995) 6567-6584, https://doi.org/10.1088/0305-4470/28/23/012

[12] W.R. Schneider and W. Wyss, Fractional diffusion and wave equations. J. Math. Phys. **30** (1989), 134–144, https://doi.org/10.1063/1.528578

[13] R. Temam, Navier-Stokes Equations: Theory and numerical analysis, Noth-Holland Publishing Company, Amsterdam, Vol 2 (1979).

[14] W. Wyss, The fractional diffusion equation. J. Math. Phys. **27** (1986) 2782–2785, https://doi.org/10.1063/1.527251